Lineare algebraische Gruppen

Vorlesung 8 im Sommersemester 2021 (am 4.06.21)

Hinweis zu den im Text verwendeten Referenzen

Referenz	Bedeutung
x.y.z	verweist auf den Abschnitt x.y.z im PDF-File zu Kapitel x, z.B verweist 3.2.1 auf Abschnitt 3.2.1 im PDF-File zu Kapitel 3.
WS 20.x, y.z	verweist auf den Abschnitt y.z im Text zur Vorlesung x im Wintersemester 2020.
SS 21.x, y.z	verweist auf den Abschnitt y.z im Text zur Vorlesung x im Sommersemester 2021.
y.z	verweist auf Aussage y.z des aktuellen Abschnitts der aktuellen Vorlesung

Wir werden die Zitate des ersten Typs bevorzugt verwenden und die Verweise der anderen Type nur für erst vor kurzem oder häufig verwendete Ergebnisse oder Definition zusätzlich angeben.

14 Kommutative lineare algebraische Gruppen

Die Dualität von $X^*(T)$ und $X_*(T)$, Limites von Funktionen auf $\mathbf{G}_m$.

14.2 Diagonalisierbare Gruppen und Tori

14.2.10 Wiederholung

14.2.10 A Vorbemerkung

Bisher haben wir der Untersuchung von F-Strukturen wenig Aufmerksamkeit gewidmet, da wir uns vorerst mit der Theorie der linearen algebraischen Gruppen über algebraisch abgeschlossenen Körpern beschäftigen wollen. An dieser Stelle bietet es sich jedoch an, einen Satz über Tori zu beweisen, welcher über einem Teilkörper

$$F \subseteq k$$

des algebraisch abgeschlossenen Grundkörper k definiert sind.

14.2.10 B Wiederholung

Sei $F \subseteq k$ ein Teilkörper des Grundkörpers k. Eine F-Struktur eines k-<u>Vektorraums</u> V ist ein F-linearer Unterraum $V_F \subseteq V$, für welchen die k-lineare Abbildung

$$k \otimes_F V_F \xrightarrow{\cong} V,\ c \otimes v \mapsto c \cdot v,$$

ein k-linearer Isomorphismus ist (vgl. 1.3.7 B).

Eine F-Struktur einer <u>endlich erzeugten k-Algebra</u> A ist eine endlich erzeugte F-Teilalgebra $A_F \subseteq A$, für welche der k-Algebra-Homomorphismus

$$k \otimes_F A_F \xrightarrow{\cong} A,\ c \otimes a \mapsto c \cdot a,$$

ein Isomorphismus von k-Algebren ist (vgl. 1.3.7 B).

Eine F-Struktur einer <u>affinen Varietät</u> X über k ist gegeben durch eine F-Struktur des Koordinatenrings von X, welche mit

$$F[X]\ (\subseteq k[X]\ )$$

bezeichnet wird. Eine affine F-Varietät ist eine affine Varietät, die mit einer solche F-Struktur versehen ist (vgl. 1.4.9 A und B).

Eine reguläre Abbildung f: $X \longrightarrow Y$ von affinen Varietäten heißt F-Morphismus oder auch über F definiert, wenn X und Y beides F-Varietäten sind und der induzierte k-Algebra-Homomorphismus der Koordinatenringe

$$f^*: k[Y] \longrightarrow k[X]$$

die F-Strukturen ineinander abbildet, d.h. wenn

$$f^*(F[Y]) \subseteq F[X]$$

gilt.

Bemerkungen

(i) Die Definition der F-Struktur einer nicht-notwendig affinen Varietät ist wesentlich aufwendiger (vgl. 1.6.14 F). Wir verzichten hier auf eine Wiederholung der Definition.

(ii) Ein F-Morphismus $\phi: X \longrightarrow Y$ von affinen Varietäten ist durch den F-Algebra-Homomorphismus

$$\phi^*_F := \phi^*|_{F[Y]}: F[Y] \longrightarrow F[X]$$

eindeutig festgelegt, denn das kommutative Diagramm

$$\begin{tikzcd} k[Y] \arrow[r, "\phi^*"] & k[X] \\ F[Y] \arrow[u, hook] \arrow[r, "\phi^*_F"] & F[X] \arrow[u, hook] \end{tikzcd}$$

definiert ein kommutatives Diagramm

$$\begin{tikzcd} k[Y] \arrow[rr, "\phi^*"] & & k[X] \\ k\otimes_F F[Y] \arrow[u, "\cong"] \arrow[urr, "\alpha"] \arrow[rr, "\beta"] & & k\otimes_F F[X] \arrow[u, "\cong"'] \\ F[Y] \arrow[u, hook] \arrow[rr, "\phi^*_F"] & & F[X] \arrow[u, hook] \end{tikzcd}$$

denn der durch f* induzierte k-Algebra-Homomorphismus α mit

$$\alpha(c\otimes f) = c\bullet\phi^*(f) = c\bullet\phi^*_F(f)$$

faktorisiert sich über

$$\beta = id\otimes \phi^*_F: k\otimes_F F[Y] \longrightarrow k\otimes_F F[X],\ c\otimes f \mapsto c\otimes \phi^*_F(f),$$

d.h. ϕ^* ist durch ϕ^*_F eindeutig festgelegt (und definiet seinerseits ϕ, vgl. Bemerkung 1.4.7(vi)).

(iii) Umgekehrt definiert jeder F-Algebra-Homomorphismus

$$h: F[Y] \longrightarrow F[X]$$

der F-Strukturen von affinen F-Varietäten einen eindeutig bestimmten F-Morphismus

$$\phi: X \longrightarrow Y$$

mit $\phi_F^* = h$, denn h induziert einen k-Algebra-Homomorphismus

$$k\otimes_F h: k[Y]\ k\otimes_F F[Y] \longrightarrow k\otimes_F F[X] \cong k[X],$$

welcher seinerseits einen F-Morphismus $X \longrightarrow Y$ induziert.

14.2.10 C Beispiele

Die meisten von uns eingeführten linearen algebraischen Gruppen besitzen für jeden Teilkörper des Grundkörpers, sagen wir

$$F \subseteq k,$$

eine in natürlicher Weise definierte F-Struktur. Zum Beispiel besitzt

$\mathbf{GL}_n$ die F-Struktur $F[\mathbf{GL}_n] := F[T_{ij}, \det(T_{ij})^{-1} \mid i,j = 1,..., n]$ (vgl. 2.1.4 Beispiel 3)

$\mathbf{D}_n$ die F-Struktur $F[\mathbf{D}_n] := F[T_{ii}, T_{ii}^{-1} \mid i = 1,..., n]$ (vgl. 2.1.4 Beispiel 4)

14.2.10 D F-Tori und zerfallende F-Tori

Sei F ein Teilkörper von k. Ein F-Torus ist eine F-Gruppe, die ein Torus ist. Ein zerfallender F-Torus T ist ein F-Torus, der F-isomorph ist zu einem $\mathbf{D}_n$.

Bemerkung

Die Untersuchung der nicht zerfallenden F-Tori, welche Galois-Theorie erfordert, wird auf Kapitel 13 verschoben.

Proposition (14.2.12)

Sei F ein Teilkörper des algebraisch abgeschlossenen Körpers k.

(i) Ein F-Torus T zerfällt genau dann über F, wenn alle seine Charaktere über F definiert sind. Ist dies der Fall, so bilden die Charaktere eine F-Vektorraumbasis von F[T].

(ii) Jede über F definerte rationale Darstellung$T \longrightarrow GL(V)$ eines über F zerfallenden Torus T ist eine direkte Summe von eindimensionalen über F definierten Darstellungen.

Beweis. Zu (i). 1. Schritt. Die Charaktere eines über F zerfallenden Torus sind über F definiert.

Die F-Struktur von $\mathbf{D}_n$ ist gegeben durch die Teilalgebra

$$F[\mathbf{D}_n] = F[T_{11},...,T_{nn}, T_{11}^{-1}, ..., T_{nn}^{-1}]$$

von

$$k[\mathbf{D}_n] = k[T_{11},...,T_{nn}, T_{11}^{-1}, ..., T_{nn}^{-1}].$$

Die Charaktere von $\mathbf{D}_n$ sind gerade die Potenzprodukte

$$T_{11}^{a_1}\bullet...\bullet T_{nn}^{a_n}: \mathbf{D}_n \longrightarrow \mathbf{G}_m \text{ mit } a_1,...,a_n \in \mathbb{Z}.$$

der T_{ii} mit ganzzahligen Exponenten. Weil T_{ii}^* gerade der k-Algebra-Homomorphismus

$$T_{ii}^*: k[T,T^{-1}] = k[\mathbf{G}_m] \longrightarrow k[\mathbf{D}_n] = k[T_{11},...,T_{nn}, T_{11}^{-1}, ..., T_{nn}^{-1}],$$
$$T \mapsto T_{ii},$$

ist, also $F[\mathbf{G}_m]$ in $F[\mathbf{D}_n]$ abbildet, ist der Charakter T_{ii} für jedes i über F definiert.

Wir sehen so, die Charaktere des F-Torus $\mathbf{D}_n$ sind über F definiert und sie bilden eine F-Vektorraumbasis von $F[\mathbf{D}_n]$.
Ist T ein zerfallender F-Torus, so gibt es einen über F definierten Isomorphismus

$$\varphi: T \longrightarrow \mathbf{D}_n.$$

Für jeden Charakter χ von $\mathbf{D}_n$ ist $\chi\circ\varphi$ ein über F definierter Charakter von T, und man erhält so alle Charatere von T.
Außerdem induziert der F-Isomorphismus φ einen über F definierten Isomorphismus

$$\varphi^*: k[\mathbf{D}_n] \longrightarrow k[T],$$

also einen Isomorphismus von F-Algebren

$$\varphi^*|_{F[\mathbf{D}_n]}: F[\mathbf{D}_n] \longrightarrow F[T].$$

Letzterer überführt die F-Vektorraumbasis der Charaktere von $\mathbf{D}_n$ in die F-Vektorraumbasis der Charaktere von T.
2. <u>Schritt</u>. Ein F-Torus T, dessen Charaktere über F definiert sind, zerfällt über F.
Weil T ein Torus ist, gibt es einen Isomorphismus linearer algebraischer Gruppen

$$\varphi: T \longrightarrow \mathbf{D}_n\ t \mapsto \varphi(t) = \mathrm{diag}(\varphi_1(t), \dots , \varphi_n(t)).$$

die Koordinatenfunktionen φ_i von φ sind Charaktere von T, also nach Vorausetzung über F definiert. Deshalb ist φ über F definiert. Die induzierte Abbildung der Koordinatenringe

$$\varphi^*: k[\mathbf{D}_n] \longrightarrow k[T]$$

bildet die F-Strukturen dieser Koordinatenringe ineinander ab,

$$\varphi^*(F[\mathbf{D}_n]) \subseteq F[T].$$

Es reicht zu zeigen, daß sogar das Gleichheitszeichen gilt, denn dann ist auch φ^{-1} über F definiert, also ein F-Isomorphismus, d.h. T zerfällt über F.
Weil φ ein Isomorphismus ist, ist auch φ^* ein solcher, also insbesondere injektiv. Wir erhalten eine exakte Sequenhz von F-Vektorräumen

$$0 \longrightarrow F[\mathbf{D}_n] \xrightarrow{\varphi^*|_{F[\mathbf{D}_n]}} F[T] \longrightarrow F[T]/\varphi^*(F[\mathbf{D}_n]) \longrightarrow 0.$$

Wir wenden den Funktor $k\otimes_F$ an und erhalten - nach Definition des Begriffs F-Struktur - die exakte Sequenz

$$0 \longrightarrow k[\mathbf{D}_n] \xrightarrow{\varphi^*} k[T] \longrightarrow k\otimes_F(F[T]/\varphi^*(F[\mathbf{D}_n])) \longrightarrow 0.$$

Weil φ^* ein Isomorphismus ist, gilt $0 = k\otimes_F(F[T]/\varphi^*(F[\mathbf{D}_n]))$, also

$$0 = \dim_k k\otimes_F(F[T]/\varphi^*(k[\mathbf{D}_n])) = \dim_F F[T]/\varphi^*(F[\mathbf{D}_n]),$$

also $\varphi^*(F[\mathbf{D}_n]) = F[T]$. Wir haben gezeigt, φ^* induziert einen Isomorphismus der F-Strukturen, ist also ein F-Isomorphismus.
<u>Zu (ii)</u>. Der Beweis ist eine Variante des Beweises der Implikation 3.2.3 (ii) $\Rightarrow$ (iii).

Wir können annehmen, $T = \mathbf{D}_n$. Sei

$$\phi\colon T \longrightarrow \mathbf{GL}(V)$$

eine über F definierte rationale Darstellung von T. Wir fixieren eine F-Vektorraumbasis der F-Struktur V_F von V. Diese ist auch eine k-Vektorraumbasis von V und gestattet es, ϕ als Homomorphismus

$$\phi\colon \mathbf{D}_n \longrightarrow \mathbf{GL}_r$$

(mit r geeignet) zu betrachten. Weil ϕ über F definiert ist, bildet

$$\phi^*\colon k[\mathbf{GL}_r] \longrightarrow k[T]$$

die F-Struktur

$$F[\mathbf{GL}_r] = F[T_{ij}, \det^{-1} \mid i,j = 1,...,r]$$

von $k[\mathbf{GL}_r]$ in die F-Struktur

$$F[T] = F[T_{11},...,F_{nn}, T_{11}^{-1},...,T_{nn}^{-1}]$$

von k[T] ab. Insbesondere liegen die Bilder $\phi^*(T_{ij}) = T_{ij}\circ\phi$ der T_{ij} in F[T], d.h. für jedes $x \in T$ gilt

$$\phi(x) = \begin{pmatrix} \phi_{11}(x) & \phi_{12}(x) & \dots & \phi_{1r}(x) \\ \phi_{21}(x) & \phi_{22}(x) & \dots & \phi_{2r}(x) \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \phi_{r1}(x) & \phi_{r2}(x) & \dots & \phi_{rr}(x) \end{pmatrix} = \sum_{i,j=1}^{n} \phi_{ij}(x)\bullet E_{ij}$$

mit regulären Funktion $\phi_{ij}\in F[T]$. Jede dieser regulären Funktion ist nach (i) eine F-Linearkombination von Charakteren von T (nach Bemerkung 1.3.7 B (iv)). Deshalb läßt sich ϕ als Linearkombination von r×r-Matrizen mit Einträgen aus F schreiben, deren Koeffizienten Charaktere von T sind, sagen wir

$$\phi(x) = \sum_{\chi\in\mathbf{X}^*(G)} \chi(x)\bullet A_\chi \tag{1}$$

mit $A_\chi \in M_r(F)$ oder in einer von der Wahl der Basis von V unabhängigen Schreibweise,

$$A_\chi \in \mathrm{End}_k(V) \text{ mit } A_\chi(V_F) \subseteq V_F \tag{2}$$

Dabei sind nur endlich viele der A_χ von Null verschieden,

$$A_\chi = 0 \text{ für fast alle } \chi\in\mathbf{X}^*(G).$$

Weil ϕ ein Gruppen-Homomorphismus ist, gilt für $x,y\in G$

$$\begin{aligned} \sum_{\chi\in\mathbf{X}^*(G)} \chi(x)\chi(y)\bullet A_\chi &= \sum_{\chi\in\mathbf{X}^*(G)} \chi(xy)\bullet A_\chi \\ &= \phi(xy) \\ &= \phi(x)\bullet\phi(y) \end{aligned}$$

$$= \sum_{\chi,\psi\in\mathbf{X}^*(G)} \chi(x)\cdot \psi(y)\cdot A_\chi\cdot A_\psi.$$

Dies ist eine Relation von Charakteren auf G×G. Weil die Charaktere von G×G linear unabhängig über k sind, folgt durch Koeffizientenvergleich[1]

$$A_\chi\cdot A_\psi = \delta_{\chi,\psi}\cdot A_\chi \qquad (3)$$

(wenn $\delta_{\chi,\psi}$ das Kronecker-Symbol bezeichnet).Weil $\phi(e)$ die identische Abbildung von V ist, folgt

$$\sum_{\chi\in\mathbf{X}^*(G)} A_\chi = \mathrm{Id}. \qquad (4)$$

Wir setzen

$$V_\chi := A_\chi(V).$$

Wegen (4) gilt dann

$$\sum_{\chi\in\mathbf{X}^*(G)} V_\chi = V.$$

Nach (3) ist A_χ auf V_ψ die identische Abbildung für $\chi=\psi$ und 0 sonst. Deshalb ist die gefundene Summenzerlegung von V direkt,

$$\bigoplus_{\chi\in\mathbf{X}^*(G)} V_\chi = V.$$

Nach Definition der A_χ sind die Räume V_χ stabil bezüglich der Operation von T auf V mit Hilfe von ϕ. Da die Anzahl der von Null verschiedenen A_χ endlich ist, gilt dasselbe für die Räume V_χ, d.h. wir können schreiben

$$V = V_{\chi_1}\oplus\ldots\oplus V_{\chi_t}$$

Zusammen mit (1) erhalten wir so für die Matrix von $\phi(x)$ bezüglich einer mit dieser Zerlegung verträglichen Basis

$$\phi(x) = \begin{pmatrix} \chi_1(x)\cdot\mathrm{Id}_{V_{\chi_1}} & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & \chi_2(x)\cdot\mathrm{Id}_{V_{\chi_2}} & \ldots & 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 0 & 0 & \ldots & \chi_t(x)\cdot\mathrm{Id}_{V_{\chi_t}} \end{pmatrix}$$

Mit anderen Worten, ϕ ist direkte Summe der 1-dimensionalen Darstellungen χ_i (wobei die Dimensionen der Räume V_{χ_i} die Vielfachheiten sind mit denen die χ_i vorkommen).

---

[1] Man beachte, für Charaktere α, β, γ und δ gilt nur dann $\alpha(x)\beta(y) = \gamma(x)\cdot\delta(y)$ für alle $x, y \in G$, wenn $\alpha=\gamma$ und $\beta = \delta$ ist (man setze $y = e$ bzw. $x = e$).

Als Charaktere von $T = \mathbf{D}_n$ sind die χ_i über F definiert.
QED.

14.2.11 Die Paarung $X^*(T)\times X_*(T) \longrightarrow \mathbb{Z}$

14.2.11 A Bezeichnungen und Definitionen

Wir schließen diesen Abschnitt ab mit Material zur Theorie der Tori. Bezeichne T einen Torus. Wir setzen

$$X := \mathbf{X}^*(T) = \{ T \xrightarrow{\chi} \mathbf{G}_m \mid \chi \text{ ist regulär und Gruppen-Homomorphismus}\}$$

und

$$Y := \mathbf{X}_*(T) = \{ \mathbf{G}_m \xrightarrow{\lambda} T \mid \lambda \text{ ist regulär und Gruppen-Homomorphismus}\}$$

(vgl. 3.2.1). Für $\chi\in X$, $\lambda\in Y$, $a \in k^*$ ist die Abbildung

$$\mathbf{G}_m \longrightarrow \mathbf{G}_m = k^*,\ a \mapsto \chi(\lambda(a)),$$

ein Charakter der multiplikativen Gruppe $\mathbf{G}_m$, d.h. eine Abbildung $\mathbf{G}_m \longrightarrow \mathbf{G}_m$, $t \mapsto t^s$ mit einer ganzen Zahl s, die wir mit

$$< \chi, \lambda> := s$$

bezeichnen.(vgl. 3.2.2 bzw. bzw. SS 21.5,14.2.2 mit n = 1), d.h. nach Definiton von $< \chi, \lambda>$ gelte

$$\chi(\lambda(t)) = t^{<\chi,\lambda>}$$

für jedes $t \in k^*$.

Bemerkung

Auf Grund der Definition[2] der Addition von Charakteren und Kocharakteren gilt

$$(\chi'+\chi'')\circ\lambda = (\chi'\circ\lambda) + (\chi''\circ\lambda)$$

und

$$\chi\circ(\lambda'+\lambda'') = (\chi\circ\lambda') + (\chi\circ\lambda'')$$

für $\chi, \chi', \chi'' \in X^*(T)$ und $\lambda, \lambda', \lambda'' \in X_*(T)$. Die Abbildung

$$< , >: X \times Y \longrightarrow \mathbb{Z},\ (\chi, \lambda) \mapsto <\chi , \lambda >,$$

ist deshalb bilinear über $\mathbb{Z}$.

14.2.11 C Lemma

(i) Mit den obigen Bezeichnungen ist durch

$$< , >: X \times Y \longrightarrow \mathbb{Z},\ (\chi, \lambda) \mapsto < \chi, \lambda >$$

eine perfekte Paarung definiert, d.h.

- jeder Homomorphismus $X \longrightarrow \mathbb{Z}$ ist von der Gestalt $\chi \mapsto < \chi, \lambda >$ für genau ein $\lambda\in Y$.
- jeder Homomorphismus $Y \longrightarrow \mathbb{Z}$ ist von der Gestalt $\lambda \mapsto < \chi, \lambda >$ für genau ein $\chi\in X$.

Insbesondere ist Y eine freie abelsche Gruppe vom selben Rang wie X.

---

[2] Die Addition der (Ko-)Charaktere stimmt mit der Multiplikation der regulären Abbildungen überein.

(ii) Die Abbildung

$$k^*\otimes Y \longrightarrow T,\ a\otimes\lambda \mapsto \lambda(a),$$

ist wohldefiniert und ein Isomorphismus von abelschen Gruppen.

Beweis. Zu (i). Wir wir T durch einen zu T isomorphen Torus ersetzen, bleiben beide Seiten bis auf Isomorphie unverändert. Wir können also annehmen

$$T = D_n$$

Wir setzen die Abbildung < , > mit den Isomorphismen von Beispiel 3.2.2 zur folgenden Abbildung zusammen.

$$\varphi:\mathbb{Z}^n \times \mathbb{Z}^n \xrightarrow{\cong} X^*(G) \times X_*(G) \longrightarrow X^*(\mathbf{G}_m)$$

$$((a_1,...,a_n), (b_1,...,b_n)) \mapsto (\chi:=\chi_1^{a_1}\bullet...\bullet \chi_n^{a_n}, \lambda := (t \mapsto \operatorname{diag}(t^{b_1}, ... , t^{b_n})) \mapsto \chi\circ\lambda.$$

Dabei bezeichne χ_i: T $\longrightarrow$ k* den Charakter von T, welcher jede Matrix auf den i-ten Eintrag der Hauptdiagonalen abbildet. Es gilt dann

$$\begin{aligned}\varphi((a_1,...,a_n), (b_1,...,b_n))(t) &= \chi_1(\operatorname{diag}(t^{b_1}, ... , t^{b_1}))^{a_1}\bullet...\bullet \chi_n(\operatorname{diag}(t^{b_1}, ... , t^{b_n}))^{a_n}\\ &= (t^{b_1})^{a_1}\bullet...\bullet(t^{b_n})^{a_n}\\ &= t^{a_1b_1+...+ a_nb_n}.\end{aligned}$$

Wenn wir X*(G), X_*(G) und X*($\mathbf{G}_m$) mit Hilfe der Isomorphismen von 3.2.2 mit $\mathbb{Z}^n$, $\mathbb{Z}^n$ und $\mathbb{Z}$ identifizieren, so bekommt die Abbildung < , > die Gestalt

$$<,>: \mathbb{Z}^n \times \mathbb{Z}^n \longrightarrow \mathbb{Z},\ ((a_1,...,a_n), (b_1,...,b_n)) \mapsto a_1b_1+...+a_nb_n.$$

Dies ist aber gerade eine in oben beschriebenen Sinne eine perfekte Paarung, denn jede $\mathbb{Z}$-lineare Abbildung

$$\mathbb{Z}^n \longrightarrow \mathbb{Z}$$

ist durch ihre Werte in den Standard-Einheitsvektoren e_i eindeutig festgelegt, wobei es zu beliebig vorgegebenen ganzzahligen Werten in den e_i genau eine solche $\mathbb{Z}$-lineare Abbildung gibt.

Zu (ii). Wie im Beweis von (i) können wir annehmen, daß der Torus T gleich

$$T = \mathbf{D}_n$$

ist. Mit Hilfe der Isomorphismen von 3.2.2 identifizieren wir Y mit $\mathbb{Z}^n$. Die Abbildiung von (ii) bekommt dann die Gestalt

$$k^*\otimes\mathbb{Z}^n \longrightarrow \mathbf{D}_n,\ c\otimes(b_1,...,b_n) \mapsto \operatorname{diag}(c^{b_1}, ... , c^{b_n}). \tag{1}$$

Das Tensorprodukt links ist isomorph zu einer direkten Summe von n Exemplaren von

$$k^*\otimes\mathbb{Z} = k^*\otimes_{\mathbb{Z}}\mathbb{Z} = k^*,\ c\otimes b \mapsto c^b\otimes 1 \mapsto c^b,$$

d.h. die Abbildung

$$k^*\otimes\mathbb{Z}^n \longrightarrow (k^*)^n,\ c \otimes (b_1,...,b_n) \mapsto (c^{b_1}, ... , c^{b_n}),$$

ist ein Gruppen-Isomorphismus mit der Inversen

$$(k^*)^n \longrightarrow k^*\otimes\mathbb{Z}^n,\ (c_1,...,c_n) \mapsto c_1\otimes e_1+...+c_n\otimes e_n.$$

Wir setzen (1) mit dieser Inversen zusammen und erhalten die Abbildung

$$(k^*)^n \longrightarrow \mathbf{D}_n,\ (c_1,...,c_n) \mapsto \operatorname{diag}(c_1,1,...,1)\bullet...\bullet\operatorname{diag}(1,...,1,c_n)$$

$$= \mathrm{diag}(c_1, \ldots , c_n).$$

Dies ist ein Gruppen-Isomorphismus. Also ist auch (1) ein solcher.
QED.

Index

Inhalt